Die kritischen Belastungen von Wellen

Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Tübingen

vorgelegt von

Willy Neumeister

Stuttgart 1926

Druck von A. Bonz' Erben

Von der Fakultät angenommen am 2. März 1926.

Referent:
Prof. Dr. Kommerell.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Einleitung.

Beansprucht man eine gegen ihre Querschnittabmessungen sehr lange zylindrische Welle auf Druck und Drillung, so existieren für die zugehörige Druckkraft bezw. das Drehmoment kritische Werte, die nicht erreicht werden dürfen, wenn ein Ausknicken der Welle vermieden werden soll. Den Zusammenhang zwischen diesen kritischen Belastungen einer Welle beliebigen Querschnitts hat R. Grammel[1] mit Hilfe der von G. Kirchhoff[2] entdeckten formalen Analogie zwischen Kreisel und elastischer Linie für den praktisch wichtigsten Fall einer Welle mit drehbar gelagerten Enden ermittelt. In vorliegender Schrift werden weitere Einspannungsarten, die teilweise für die kreiszylindrische Welle auf anderem Wege schon von A. G. Greenhill[3] untersucht worden sind, nach der von Grammel angegebenen Methode behandelt, wobei wir folgende Fälle unterscheiden:

1. Welle mit biegungsfreien Enden. Dieser Fall unterscheidet sich von dem von Grammel behandelten dadurch, daß der an den Wellen-Enden angreifende Drillingsvektor $\mathfrak{M}$ nicht in die Richtung der ursprünglichen, sondern in die der geknickten Wellenachse fällt (§ 3).
2. Welle mit parallel verschiebbaren Enden (§ 5).
3. Welle mit fest eingespannten Enden (§ 6).

Den Kern der folgenden Untersuchungen bildet die Aufstellung von Formeln, die die Beurteilung der Knickfestigkeit von Wellen ermöglichen, insbesondere wird eine von Greenhill angegebene Formel (Kreiszylindrische Welle mit fest eingespannten Enden) berichtigt (§ 6). In § 4 wird für eine von Grammel ausgesprochene Vermutung der Beweis der Richtigkeit erbracht. Es

bleiben noch 2 weitere Einspannungsfälle zu erledigen: Die Welle mit einem fest eingespannten und einem freien Ende und die Welle mit einem fest eingespannten und einem drehbar gelagerten Ende. Trotz langwieriger Untersuchungen ist es dem Verfasser nicht gelungen, diese Probleme in eindeutiger Weise zu erledigen, da die Theorie hier in erster Ordnung keine von Null verschiedenen Lösungen liefert und die Rechnung mit Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnung praktisch kaum durchführbar sein dürfte. Auch die experimentelle Untersuchung brachte keine Klärung in diesen Fragen, da die Randbedingungen dieser Einspannungsarten sich nicht leicht mit genügender Genauigkeit verwirklichen lassen.

Es sei dem Verfasser auch an dieser Stelle gestattet, den Herren Professoren Grammel und Hessenberg für ihre freundlichen Ratschläge seinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

§ 1. Die Grundgleichungen.

Eine gerade zylindrische Welle wird an ihren Enden $t = 0$ und $t = l$ (t Bogenlänge auf der Wellenachse) durch Kräfte und Momente belastet.

(Die Wirkung der Schwerkraft wird hiebei nicht berücksichtigt.) In jedem Querschnitt t bilden die Hauptträgheitsachsen und die Wellentangente ein rechtwinkliges Koordinatensystem $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\mathfrak{v}$, das Hauptachsenkreuz (Fig. 1), von dem aus gesehen die Änderungsgeschwindigkeiten der unten definierten Vektoren $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{B}$ den Bedingungen genügen[4]

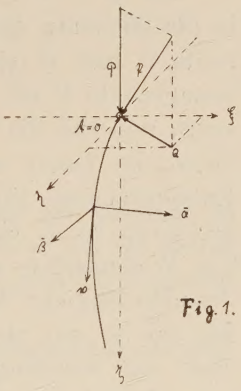


Fig. 1.

$$\dot{\mathfrak{P}} = [\mathfrak{P}\,\mathfrak{o}] \tag{1}$$
$$\dot{\mathfrak{B}} = [\mathfrak{B}\,\mathfrak{o}] + [\mathfrak{P}\,\mathfrak{v}].$$

Die Vektoren $\mathfrak{P}$ usw. besitzen hiebei folgende Bedeutung:

$\mathfrak{P}$ belastende Kraft am Ende $t = l$,

$\mathfrak{B}$ Vektor der Beanspruchung, Resultante aus dem Biegungs- und Drillungsmoment,

$\mathfrak{o}$ Vektor der Formänderung mit dem Komponenten p, q (Krümmung) und r (Drillung pro Längeneinheit) in Bezug auf das oben definierte Hauptachsenkreuz,

$\mathfrak{v}$ Einheitsvektor in Richtung der Tangente an die Wellenachse.

Die Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{o}$ stellen außerdem noch den Fortschreit- und Drehvektor des Hauptachsenkreuzes dar, falls dieses längs der Wellenachse mit der Geschwindigkeit eins wandert.

Sind α und β die Biegungssteifigkeiten ($\alpha \geq \beta$), γ die Drillungssteifigkeit der Welle, so sind nach den Grundgesetzen der Elastizitätslehre die Komponenten von $\mathfrak{B}$ nach dem Hauptachsenkreuz

$$\mathfrak{B}_1 = \alpha p$$
$$\mathfrak{B}_2 = \beta q$$
$$\mathfrak{B}_3 = \gamma r.$$

Zwischen α, β, γ, dem Elastizitätsmodul E, dem Schubmodul G, den Flächenträgheitsmomenten J_1 und J_2 und dem Drillungswiderstande J_0 bestehen die Beziehungen

$$\alpha = EJ_1$$
$$\beta = EJ_2$$
$$\gamma = GJ_0.$$

---

§ 2. Die allgemeinen Integrale der Grundgleichungen.

Die in $t = l$ angreifende Kraft $\mathfrak{P}_l$ zerlegen wir nun in eine in die Richtung der ursprünglichen Wellenachse fallende Komponente P und in eine hiezu senkrechte mit dem Betrag Q. Die Komponente P ist die durch die Welle zu übertragende Achsialkraft, während die (vorläufig unbekannte) Kraft Q möglicherweise durch das Lager auf die Welle ausgeübt wird. (Fig. 1 Seite 5.) Entsprechendes gilt für die in $t = 0$ wirkende Kraft $\mathfrak{P}_0$, die mit der Kraft $\mathfrak{P}_l$ im Gleichgewicht steht. Ebenso zerlegen wir das an den Wellenenden angreifende Drehmoment $\mathfrak{C}_l$ bezw. $\mathfrak{C}_0$ in ein in die ursprüngliche Wellenachse fallendes Drillungsmoment $\mathfrak{M}_l$ bezw. $\mathfrak{M}_0$ und in ein etwaiges Einspannungsmoment $\mathfrak{N}_l$ bezw. $\mathfrak{N}_0$ senkrecht zur ursprünglichen Wellenachse. Die Winkel zwischen P bezw. Q und dem Hauptachsenkreuz seien δ_1, δ_2, δ_3 bezw. χ_1, χ_2, χ_3, ihre Kosinusse seien x, y, z bezw. λ, μ, ν, wobei

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{2a}$$
$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1 \quad \text{und, da } Q \perp P \tag{2b}$$
$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0. \tag{2c}$$

Die Grundgleichungen (1) lauten dann in Komponenten nach dem Hauptachsenkreuz

$$\begin{aligned} P\dot{x} + Q\dot{\lambda} &= (Py + Q\mu)r - (Pz + Q\nu)q \\ P\dot{y} + Q\dot{\mu} &= (Pz + Q\nu)p - (Px + Q\lambda)r \\ P\dot{z} + Q\dot{\nu} &= (Px + Q\lambda)q - (Py + Q\mu)p \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \alpha\dot{p} &= (\beta - \gamma)qr - (Py + Q\mu) \\ \beta\dot{q} &= (\gamma - \alpha)pr + (Px + Q\lambda) \end{aligned} \tag{4a}$$

$$\gamma\dot{r} = (\alpha - \beta)pq. \tag{4b}$$

Unsere Aufgabe gestattet nun, diese Gleichungen so zu vereinfachen, daß eine Integration in geschlossener Form möglich ist. Zur Bestimmung der kritischen Belastungen, die die Welle zum Ausknicken bringen, genügt es nämlich, die Gleichgewichtsfigur der elastischen Linie zu betrachten, die unter dem Einflusse dieser Belastungen aus der ursprünglich geraden Wellenachse durch eine beliebig kleine Deformation hervorgeht; d. h. die Größen x, y, p, q dürfen als klein von erster Ordnung betrachtet und ihre höheren Potenzen vernachläßigt werden. (Diese Betrachtung, die hier streng gültig ist, ist in der Dynamik als Näherungsverfahren beim schnellen Kreisel unter dem Namen Methode der kleinen Schwingungen bekannt.) Da dann wegen (2a) $z = 1$ und wegen (2c) $\nu \ll 1$ gesetzt werden darf, so gehen die Gleichungen (3) und (4b) über in

$$\begin{aligned} P\dot{x} + Q\dot{\lambda} &= (Py + Q\mu)r - Pq \\ P\dot{y} + Q\dot{\mu} &= (Px + Q\lambda)r + Pp \end{aligned} \tag{5a}$$

$$\begin{aligned} Q\dot{\nu} &= Q(\lambda q - \mu p) \\ \gamma\dot{r} &= 0. \end{aligned} \tag{5b}$$

Die Drillung r ist also in erster Näherung als konstant zu betrachten und zwar ist sie angegeben durch $M = \gamma r$. (M Betrag des Drillungsmomentes $\mathfrak{M}$.) Die Gleichung (5b) wird im folgenden nicht mehr benötigt.

Wir schreiten nun zur Integration der Gleichungen (4a) und (5a). Mit Hilfe der Abkürzungen

$$\begin{aligned} A &= \frac{P - (\alpha - \gamma)r^2}{2\beta} \\ B &= \frac{P - (\beta - \gamma)r^2}{2\alpha} \\ C &= \frac{(\alpha + \beta - \gamma)^2 r^2}{2\alpha\beta} \end{aligned} \tag{6}$$

ergibt sich als charakteristische Gleichung des simultanen Systems (4a) und (5a)

$$\varrho^4 - 2(A + B + C)\varrho^2 + 4AB = 0. \tag{7}$$

Diese biquadratische Gleichung, die im entsprechenden Kreiselproblem die Frequenz angibt, besitzt die Wurzeln

$$(i = 1,2) \quad \varrho_i = \sqrt{\tfrac{1}{2}(A + B + C) - \sqrt{AB}} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}(A + B + C) + \sqrt{AB}} \tag{8}$$

Führt man noch die Integrationskonstanten a_1, a_2, τ_1, τ_2 ein, und versteht man unter $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ Faktoren, für die man aus (4a) unter Benützung von (6) die beiden durch die Frequenzgleichung (7) ineinander übergehenden Wertepaare

$$\varkappa_i = \frac{\varrho_i \sqrt{2\alpha\beta C}}{\alpha(2B - \varrho_i^2)} \qquad \text{bezw.} \tag{9}$$

$$\varkappa_i = \frac{\beta(2A - \varrho_i^2)}{\varrho_i \sqrt{2\alpha\beta C}} \tag{10}$$

erhält, so folgt aus (4a) und (5a) durch Integration[4]

$$\begin{aligned} x + \frac{Q}{P}\lambda &= \Sigma a_i \cos(\varrho_i t - \tau_i) \\ y + \frac{Q}{P}\mu &= \Sigma \varkappa_i a_i \sin(\varrho_i t - \tau_i) \\ p &= \Sigma a_i (r + \varkappa_i \varrho_i) \cos(\varrho_i t - \tau_i) \\ q &= \Sigma a_i (\varrho_i + \varkappa_i r) \sin(\varrho_i t - \tau_i) \end{aligned} \tag{11}$$

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{i=2}$$

Für $P = 0$ und $Q \neq 0$ verlieren die Integrale (11) ihre Gültigkeit; um sie auch hier verwenden zu können, ist in bekannter Weise nach Potenzen von P zu entwickeln. (S. z. B. § 3b.)

Der Punkt $t = 0$ sei der Nullpunkt eines rechtwinkligen Achsenkreuzes ξ, η, ζ, die ζ-Achse falle mit der Wellenachse vor der Knickung zusammen. Da die Projektion des Hauptachsenkreuzes auf die ξ, η-Ebene in erster Näherung mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit r um die ζ-Achse rotiert, so sind die Koordinaten der deformierten Wellenachse[5]

$$\begin{aligned} \xi &= -\int_0^t (x \cos rt - y \sin rt)\, dt \\ \eta &= -\int_0^t (x \sin rt + y \cos rt)\, dt \\ \zeta &= t, \end{aligned} \tag{12}$$

während die Kosinusse λ und μ (da $\nu \ll 1$) mit Rücksicht auf (2b) bestimmt sind durch

$$\begin{aligned} \lambda &= \cos(\chi_0 - rt) \\ \mu &= \sin(\chi_0 - rt), \end{aligned} \tag{13}$$

wenn die Kraft Q und die mit $\bar{\alpha}$ bezeichnete erste Querschnittshauptachse im Punkte $t = 0$ den Winkel χ_0 einschließen.

Unterwirft man die Integrale (11) den Randbedingungen des jeweiligen Einspannungsfalles, so findet man für die Integrations-Konstanten a_i und τ_i Gleichungen, die eine Beziehung zwischen den zur Knickung erforderlichen Frequenzen ϱ_1 unb ϱ_2 und damit auch zwischen den kritischen Belastungen M und P ergeben. Hierunter verstehen wir das Wertsystem, das den bei kleineren Werten stabilen gestreckten Gleichgewichtszustand labil macht.

---

§ 3. Welle mit biegungsfreien Enden.

Wir betrachten nunmehr eine an ihren Enden $t = 0$ und $t = l$ drehbar gelagerte Welle. Fällt der Vektor $\mathfrak{E}$ des Endmomentes in die Richtung der dortigen Wellentangente (Fig. 2), so sind die Wellenenden biegungsfrei und wir haben die Randbedingungen:

$$(14) \qquad \left\{ \begin{array}{l} p = 0 \\ q = 0 \end{array} \right\} \quad \text{für } t = 0$$

$$(15) \qquad \left\{ \begin{array}{l} p = 0 \\ q = 0 \end{array} \right\} \quad \text{für } t = l$$

$$(16) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \xi = 0 \\ \eta = 0 \end{array} \right\} \quad \text{für } t = l.$$

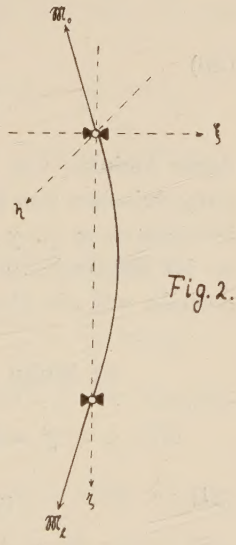


Fig. 2.

Die Randbedingung (16), die sich im vorliegenden Falle offensichtlich nur auf die Lage und nicht auf die Gestalt der Wellenachse bezieht, wird erst später verwendet. (Gleichung 25.) Setzt man (11) in (14) und (15) ein, so kommt unter Einführung der Größen

$$(17) \qquad \begin{array}{l} G_i = r + \varkappa_i \varrho_i \\ H_i = \varrho_i + \varkappa_i r \end{array}$$

für die Unbekannten $a_i \cos \tau_i$ usw. das homogene Gleichungssystem

$$(18) \qquad \begin{array}{l} \Sigma\, G_i a_i \cos \tau_i = 0 \\ \Sigma\, H_i a_i \sin \tau_i = 0 \\ \Sigma\, (G_i a_i \cos \varrho_i l \cos \tau_i + G_i a_i \sin \varrho_i l \sin \tau_i) = 0 \\ \Sigma\, (H_i a_i \sin \varrho_i l \cos \tau_i - H_i a_i \cos \varrho_i l \sin \tau_i) = 0. \end{array}$$

Diese Gleichungen für die Größen $a_i \cos \tau_i$ und $a_i \sin \tau_i$ besitzen nur dann von Null verschiedene Lösungen, d. h. ein Ausknicken der Welle ist nur dann möglich, wenn die Bedingung erfüllt ist:

$$\begin{vmatrix} G_1 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_1 & H_2 \\ G_1 \cos \varrho_1 l & G_2 \cos \varrho_2 l & G_1 \sin \varrho_1 l & G_2 \sin \varrho_2 l \\ H_1 \sin \varrho_1 l & H_2 \sin \varrho_1 l & -H_1 \cos \varrho_1 l & -H_2 \cos \varrho_2 l \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante liefert die Gleichung

$$0 = 2 G_1 H_1 G_2 H_2 (1 - \cos \varrho_1 l \cos \varrho_2 l) - (G_1^2 H_2^2 + G_2^2 H_1^2) \sin \varrho_1 l \sin \varrho_2 l, \tag{19}$$

die mit Hilfe bekannter trigonometrischer Beziehungen nach einiger Umformung die Gestalt annimmt

$$G_1 G_2 H_1 H_2 \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\varrho_1 l}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\varrho_2 l}{2}\right) = (G_1^2 H_2^2 + G_2^2 H_1^2) \operatorname{tg} \frac{\varrho_1 l}{2} \operatorname{tg} \frac{\varrho_2 l}{2}$$

und in das Gleichungspaar zerfällt

$$\begin{aligned} G_1 H_2 \operatorname{tg} \frac{\varrho_1 l}{2} &= G_2 H_1 \operatorname{tg} \frac{\varrho_2 l}{2} \\ G_1 H_2 \operatorname{tg} \frac{\varrho_2 l}{2} &= G_2 H_1 \operatorname{tg} \frac{\varrho_1 l}{2}, \end{aligned} \tag{20}$$

deren kleinste von Null verschiedene Wurzel die gesuchte Bedingung zwischen den kritischen Belastungen M und P und den Wellenkonstanten α, β, γ und l darstellt. Das Aufsuchen dieser Wurzel ist im allgemeinsten Falle sehr umständlich, wir beschränken uns deshalb auf die Besprechung einiger Sonderfälle.

a) Welle mit gleichen Biegungssteifigkeiten.

Für $\alpha = \beta$ wird zufolge (6) und (8)

$$\varrho_{1,2} = r \left(1 - \frac{\gamma}{2\alpha}\right) \pm \sqrt{\frac{P}{\alpha} + \frac{\gamma^2 r^2}{4\alpha^2}} \tag{21}$$

und wegen (9) und (10)

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 = -1.$$

Dann wird

$$-G_i = H_i = (\varrho_i - r)$$

und die Gleichungen (20) gehen über in die eine Gleichung

$$\operatorname{tg} \frac{\varrho_1 l}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varrho_2 l}{2}. \tag{22}$$

Diese liefert die brauchbare Wurzel

$$(\varrho_1 - \varrho_2)\frac{l}{2} = \pi. \tag{22a}$$

Achtet man noch auf (21), so lautet wegen $M = \gamma r$ die Knickbedingung

$$M^2 + 4\alpha P = \left(\frac{2\pi\alpha}{l}\right)^2, \tag{23}$$

die somit mit der von Greenhill[6] und Grammel[7] für andere Randbedingungen gefundenen Lösung übereinstimmt. In den Grenzfällen $M = 0$ bezw. $P = 0$ geht diese Formel über in die bekannte Eulersche Knicklast bezw. in ein Knickmoment, das ebensogroß ist wie das von A. Föppl[8] für die Welle mit drehbaren Lagern berechnete.

Die Gleichung der ausgeknickten Wellenachse ist im vorliegenden Falle natürlich nicht dieselbe wie im Greenhillschen Falle, da ja laut Randbedingung (14) und (15) die Wellenenden Wendepunkte sein sollen. Wir erhalten zunächst aus (11) und (13) mit $\varkappa_1 = \varkappa_2 = -1$

$$x\cos rt - y\sin rt = \Sigma a_i \cos([\varrho_i - r]t - \tau_i) - \frac{Q}{P}\cos\chi_0$$

$$x\sin rt + y\cos rt = \Sigma - a_i \sin([\varrho_i - r]t - \tau_i) - \frac{Q}{P}\sin\chi_0$$

und hieraus durch Integration gemäß (12)

$$\begin{aligned}\xi &= \Sigma\left(\frac{-a_i\sin[(\varrho_i - r)t - \tau_i]}{\varrho_i - r} - \frac{a_i\sin\tau_i}{\varrho_i - r}\right) + \frac{Qt}{P}\cos\chi_0\\ \eta &= \Sigma\left(\frac{-a_i\cos[(\varrho_i - r)t - \tau_i]}{\varrho_i - r} + \frac{a_i\cos\tau_i}{\varrho_i - r}\right) + \frac{Qt}{P}\sin\chi_0.\end{aligned} \tag{24}$$

Zur Bestimmung von Q und χ_0 setzen wir (24) in die Randbedingung (16) ein und finden

$$\begin{aligned}\frac{Q}{P}\cos\chi_0 &= \Sigma\frac{1}{(\varrho_i - r)l}\left[a_i\sin[(\varrho_i - r)l - \tau_i] + a_i\sin\tau_i\right]\\ \frac{Q}{P}\sin\chi_0 &= \Sigma\frac{1}{(\varrho_i - r)l}\left[a_i\cos[(\varrho_i - r)l - \tau_i] - a_i\cos\tau_i\right].\end{aligned} \tag{25}$$

Für die Integrationskonstanten $a_i\cos\tau_i$ und $a_i\sin\tau_i$ folgt aus (18) mit Rücksicht auf (22) die Verhältniskette

$$\begin{aligned}&a_1\cos\tau_1 : a_2\cos\tau_2 : a_1\sin\tau_1 : a_2\sin\tau_2\\ &= H_2\cos\varphi : -H_1\cos\varphi : H_2\sin\varphi : -H_1\sin\varphi,\end{aligned} \tag{26}$$

wenn φ eine von der Anfangslage des ξ, η-Systems abhängige unwichtige Konstante bedeutet. Aus (24) folgen dann wegen (25) und (26) die gesuchten Gleichungen

$$\xi = a\Big[-\frac{\varrho_2 - r}{\varrho_1 - r}\Big\{\sin[(\varrho_1 - r)t - \varphi] - \frac{t}{l}\sin[(\varrho_1 - r)l - \varphi] + \frac{l-t}{l}\sin\varphi\Big\}$$

$$(27)\qquad + \frac{\varrho_1 - r}{\varrho_2 - r}\Big\{\sin[(\varrho_2 - r)t - \varphi] - \frac{t}{l}\sin[(\varrho_2 - r)l - \varphi] + \frac{l-t}{l}\sin\varphi\Big\}\Big]$$

$$\eta = a\Big[-\frac{\varrho_2 - r}{\varrho_1 - r}\Big\{\cos[(\varrho_1 - r)t - \varphi] - \frac{t}{l}\cos[(\varrho_1 - r)l - \varphi] - \frac{l-t}{l}\cos\varphi\Big\}$$

$$+ \frac{\varrho_1 - r}{\varrho_2 - r}\Big\{\cos[(\varrho_2 - r)t - \varphi] - \frac{t}{l}\cos[(\varrho_2 - r)l - \varphi] - \frac{l-t}{l}\cos\varphi\Big\}\Big]$$

$$\zeta = t.$$

Die Konstante a der Ausknickung bleibt unbestimmt. Die Projektion dieser Raumkurve auf die ξ, η-Ebene ist ein Spitzenoval, dessen Spitzenwinkel ψ der Ungleichung genügt

$$0 < \psi < \psi_0,$$

wobei ψ_0 im Grenzfall $P = 0$ erreicht wird. Durch Entwickeln nach Potenzen von der zugleich mit P gegen 0 gehenden Größe $(\varrho_1 - r)$ erhält man, wenn man $\varphi = 0$ und $\frac{a\,l}{2\,\pi} = b$ setzt, als Gleichung der Wellenachse im Falle $P = 0$

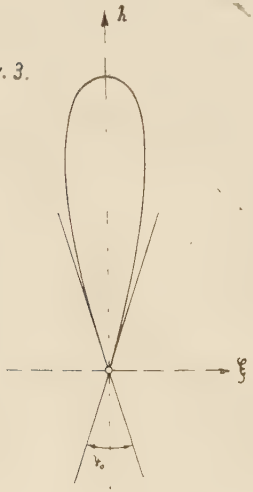


Fig. 3.

$$\xi = b \sin\frac{\pi t}{l}\cos\frac{\pi t}{l}$$

$$\eta = b\left(\sin^2\frac{\pi t}{l} + t(l - t)\frac{\pi^2}{l^2}\right).$$

Da die Kurve symmetrisch zur η-Achse ist (Fig. 3), so läßt sich ψ_0 berechnen aus der Gleichung

$$\operatorname{cotg}\frac{\psi_0}{2} = \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{t=0} = \pi,$$

somit $$\psi_0 = 2\,\operatorname{arccotg}\pi \approx 35^0\,20'.$$

Für $M = 0$ (Fall der Eulerschen Knickung) stellt (27) eine ebene Sinuskurve dar ($\psi = 0$).

b) Welle mit beliebigem Querschnitt ohne Achsialkraft.

Wir suchen nun das der Eulerschen Knicklast entsprechende Knickmoment für den Fall $\alpha \neq \beta$. Mit $P = 0$ folgt aus (6) bis (10)

(28)
$$\varrho_1 = r$$
$$\varrho_2 = r\sqrt{\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{\alpha\beta}}$$

(29)
$$\varkappa_1 = -1$$
$$\varkappa_2 = -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}}.$$

Nun wird $G_1 = 0$ und $H_1 = 0$, somit $\frac{G_1}{H_1} = \frac{0}{0}$, also unbestimmt. Der Wert dieses Quotienten ist durch Entwickeln nach Potenzen von P zu bestimmen. Aus (9) und (10) ergibt sich durch Multiplikation

$$\varkappa_i^2 = \frac{\beta(2A - \varrho_i^2)}{\alpha(2B - \varrho_i^2)}.$$

Setzt man für A und B die in (6) angegebenen Werte ein, so wird

$$\varkappa_1^2 = \frac{P - \beta(\varrho_1^2 - r^2) - (\alpha+\beta-\gamma)r^2}{P - \alpha(\varrho_1^2 - r^2) - (\alpha+\beta-\gamma)r^2},$$

somit in erster Näherung

$$\varkappa_1 = \pm\left(1 - \frac{(\alpha-\beta)(\varrho_1^2 - r^2)}{2(\alpha+\beta-\gamma)r^2}\right),$$

wobei wieder das negative Vorzeichen zu wählen ist.

Für $\frac{G_1}{H_1} = \frac{r + \varkappa_1\varrho_1}{\varrho_1 + \varkappa_1 r}$ erhält man nun

$$\frac{G_1}{H_1} = \frac{-(\varrho_1 - r) + \dfrac{(\alpha-\beta)(\varrho_1^2 - r^2)\varrho_1}{2(\alpha+\beta-\gamma)r^2}}{(\varrho_1 - r) + \dfrac{(\alpha-\beta)(\varrho_1^2 - r^2)r}{2(\alpha+\beta-\gamma)r^2}}.$$

Dividiert man mit $(\varrho_1 - r)$ durch, so folgt mit $\varrho_1 = r$ für den unbestimmten Ausdruck

$$\frac{G_1}{H_1} = -\frac{2\beta-\gamma}{2\alpha-\gamma}.$$

Aus (28) und (29) erhält man sofort

$$\frac{H_2}{G_2} = -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}}.$$

Führt man noch die Größen

$$m = \sqrt{\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{\alpha\beta}}$$

$$w = \frac{G_1 H_2}{G_2 H_1} = \frac{2\beta-\gamma}{2\alpha-\gamma}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}}$$

ein, so lautet das Gleichungspaar (20)

$$\text{(30)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{mrl}{2} &= w\operatorname{tg}\frac{rl}{2} \\ \operatorname{tg}\frac{rl}{2} &= w\operatorname{tg}\frac{mrl}{2}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind mit den von Grammel[9] für die drehbar gelagerte Welle gefundenen identisch, es gelten somit alle dort angegebenen Knickformeln auch für das vorliegende Problem. Die Projektionen der Wellenachse auf die ξ, η-Ebene, die wir nicht näher untersuchen wollen, ist bei allen Querschnitten vom Charakter der in Fig. 3 abgebildeten Schleife.

Wir stellen fest, daß die Knickfestigkeit in dem hier untersuchten und in dem Falle der Welle mit drehbar gelagerten Enden dieselbe ist, obwohl die ausgeknickten Wellenachsen ganz verschieden sind. Dies ist auch aus folgendem leicht einzusehen: Zerlegt man den Vektor $\mathfrak{C}$ des Endmomentes in unserem Einspannungsfall in 2 Komponenten, von denen die eine parallel, die andere senkrecht zur ursprünglichen Wellenachse ist, so unterscheidet sich die erstere von dem Endvektor der drehbar gelagerten Welle, die durch eine Kraftschraube $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{P}$ parallel zur ursprünglichen Wellenachse belastet ist, nur um Größen zweiter Ordnung, während die zweite Komponente als unendlich kleines Biegungsmoment erster Ordnung zwar die Gleichgewichtsform der elastischen Linie beeinflußt, jedoch die Größe der kritischen Belastungen nicht ändert.

c) Welle mit nahezu gleichen Biegungssteifigkeiten.

Sind α und β sehr wenig voneinander verschieden, so ist es gestattet, die Konstante $\varepsilon = \frac{\alpha-\beta}{\alpha}$ als klein von erster Ordnung zu betrachten und ihre höheren Potenzen zu vernachlässigen. Da

nun für $\varepsilon = 0$ die Frequenzen ϱ_i die in (21) angegebenen Werte (im folgenden mit σ_i bezeichnet) annehmen, so können wir setzen

(31) $$\varrho_i = \sigma_i + \varepsilon \mu_i .$$

Analog ergibt sich

(32) $$\varkappa_i = -1 + \varepsilon M_i$$

und $$\frac{H_1 G_2}{H_2 G_1} = 1 + \varepsilon K.$$

Wie der weitere Verlauf der Rechnung zeigen wird, genügt es, die linearen Glieder μ_1 und μ_2 zu berechnen. Zu diesem Zwecke entwickeln wir (8) nach Potenzen von ε und erhalten zunächst mit Hilfe von (6), wenn wir die Reihe hinter den Gliedern erster Ordnung abbrechen,

$$\tfrac{1}{2}(A + B + C) = \frac{P}{2\alpha} + \frac{r^2}{2}\left(1 - \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma^2}{2\alpha^2}\right) + \varepsilon\left[\frac{P}{4\alpha} + \frac{\gamma^2 r^2}{4\alpha^2} - \frac{\gamma r^2}{4\alpha}\right]$$

$$\sqrt{AB} = \frac{P}{2\alpha} - \frac{\alpha - \gamma}{\alpha}\frac{r^2}{2} + \varepsilon\left(\frac{P}{4\alpha} + \frac{\gamma r^2}{4\alpha}\right).$$

Durch Addition bezw. Subtraktion folgt

$$\tfrac{1}{2}(A + B + C) + \sqrt{AB} = \frac{P}{\alpha} + \frac{\gamma^2 r^2}{4\alpha^2} + \varepsilon\left(\frac{P}{2\alpha} + \frac{\gamma^2 r^2}{4\alpha^2}\right)$$

$$\tfrac{1}{2}(A + B + C) - \sqrt{AB} = r^2\left(1 - \frac{\gamma}{2\alpha}\right)^2 - \varepsilon\frac{\gamma r^2}{2\alpha}\left(1 - \frac{\gamma}{2\alpha}\right)$$

und weiterhin durch Radizieren

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}(A + B + C) + \sqrt{AB}} = \sqrt{\frac{P}{\alpha} + \frac{\gamma^2 r^2}{4\alpha^2}} + \varepsilon\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{\alpha} + \frac{\gamma^2 r^2}{4\alpha^2}} - \frac{P}{4\alpha\sqrt{\frac{P}{\alpha} + \frac{\gamma^2 r^2}{4\alpha^2}}}\right]$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}(A + B + C) - \sqrt{AB}} = r\left(1 - \frac{\gamma}{2\alpha}\right) - \varepsilon\frac{\gamma r}{4\alpha}.$$

Beachtet man noch die aus (21) folgenden Beziehungen

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = +\sqrt{\frac{P}{\alpha} + \frac{\gamma^2 r^2}{4\alpha^2}}$$

$$\frac{\sigma_1 - r}{2} = -\frac{\gamma r}{4\alpha} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{\alpha} + \frac{\gamma^2 r^2}{4\alpha^2}}$$

$$\frac{\sigma_2 - r}{2} = -\frac{\gamma r}{4\alpha} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{\alpha} + \frac{\gamma^2 r^2}{4\alpha^2}},$$

so findet man schließlich durch Addition bezw. Subtraktion gemäß (8) für die Frequenzen ϱ_1 und ϱ_2

$$(33) \qquad \varrho_1 = \sigma_1 + \varepsilon\left(\frac{\sigma_1 - r}{2} - \frac{P}{2\alpha(\sigma_1 - \sigma_2)}\right) = \sigma_1 + \varepsilon\mu_1$$

$$(34) \qquad \varrho_2 = \sigma_2 + \varepsilon\left(\frac{\sigma_2 - r}{2} + \frac{P}{2\alpha(\sigma_1 - \sigma_2)}\right) = \sigma_2 + \varepsilon\mu_2.$$

Wir setzen in (20) ein und erhalten

$$(35) \qquad \begin{aligned} &\operatorname{tg}\frac{\sigma_1 l}{2} - \operatorname{tg}\frac{\sigma_2 l}{2} - \varepsilon\left[K\operatorname{tg}\frac{\sigma_2 l}{2} - (\mu_1 - \mu_2)\frac{l}{2} - \frac{\mu_1 l}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\sigma_1 l}{2} + \frac{\mu_2 l}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\sigma_2 l}{2}\right] = 0 \\ &\operatorname{tg}\frac{\sigma_2 l}{2} - \operatorname{tg}\frac{\sigma_1 l}{2} - \varepsilon\left[K\operatorname{tg}\frac{\sigma_1 l}{2} + (\mu_1 - \mu_2)\frac{l}{2} - \frac{\mu_2 l}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\sigma_2 l}{2} + \frac{\mu_1 l}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\sigma_1 l}{2}\right] = 0. \end{aligned}$$

Da ε^2 vernachläßigt wird, so darf in den eckigen Klammern $\operatorname{tg}\frac{\sigma_1 l}{2} = \operatorname{tg}\frac{\sigma_2 l}{2}$ gesetzt werden. Durch Multiplikation dieser beiden Gleichungen folgt dann für die Gleichung (19)

$$(36) \qquad \left(\operatorname{tg}\frac{\sigma_1 l}{2} - \operatorname{tg}\frac{\sigma_2 l}{2}\right)^2 + \varepsilon(\mu_1 - \mu_2)l\left(\operatorname{tg}\frac{\sigma_1 l}{2} - \operatorname{tg}\frac{\sigma_2 l}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\sigma_1 l}{2}\right) = 0.$$

Für $\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\sigma_1 l}{2}\right)$ darf wieder $\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\sigma_1 l}{2}\operatorname{tg}\frac{\sigma_2 l}{2}\right)$ gesetzt werden, und die Gleichung (36) läßt sich umformen in

$$(37) \qquad \left(\operatorname{tg}(\sigma_1 - \sigma_2)\frac{l}{2} + \varepsilon(\mu_1 - \mu_2)l\right)\operatorname{tg}(\sigma_1 - \sigma_2)\frac{l}{2} = 0.$$

Die kleinste für $\varepsilon = 0$ in (22a) übergehende Wurzel dieser Gleichung ist

$$(38) \qquad (\sigma_1 - \sigma_2)\frac{l}{2} = \pi - \varepsilon(\mu_1 - \mu_2)l.$$

Aus (21) und (22), (33) und (34) berechnet sich

$$(39) \qquad (\mu_1 - \mu_2)l = \pi - \frac{Pl^2}{2\alpha\pi},$$

und (38) läßt sich schreiben

$$(40) \qquad M^2 + 4\alpha p(1 - \varepsilon) = \left(\frac{2\pi\alpha(1 - \varepsilon)}{l}\right)^2.$$

Die Knickfestigkeit einer nahezu kreiszylindrischen Welle ist somit in erster Näherung nur von der kleineren Biegungssteifigkeit $\beta = \alpha(1 - \varepsilon)$ abhängig. (Vgl. das Ergebnis des nächsten §.)

§ 4. Nahezu kreiszylindrische Welle mit drehbaren Lagern.

Wird eine zylindrische Welle beliebigen Querschnitts an ihrem Ende $t = l$ durch eine in die Richtung der ungeknickten Wellenachse fallende Kraftschraube $\mathfrak{M}, \mathfrak{P}$ belastet (dies ist, wie schon eingangs erwähnt, bei den meisten in der Technik vorkommenden Wellen der Fall), so verschwindet aus Gleichgewichtsgründen die Komponente Q und der Zusammenhang zwischen den kritischen Belastungen M und P wird nach Grammel[10] dargestellt durch die Gleichung

$$
\begin{aligned}
(41)\qquad & E_1 F_1 (S_2^2 - D_2^2) + E_2 F_2 (S_1^2 - D_1^2) \\
& = (E_1 F_2 + E_2 F_1)(S_1 S_2 - D_1 D_2) \cos(\varrho_1 - \varrho_2) \frac{l}{2} \\
& + (E_1 F_2 - E_2 F_1)(S_1 D_2 - S_2 D_1) \cos(\varrho_1 + \varrho_2) \frac{l}{2}
\end{aligned}
$$

Die Größen D_i, E_i, F_i, S_i besitzen hiebei die Werte

$$
\begin{aligned}
E_i &= \alpha \varkappa_i \varrho_i + (\alpha - \gamma) r \\
F_i &= \beta \varrho_i \quad + (\beta - \gamma) \varkappa_i r \\
(42)\qquad D_i &= \frac{1 - \varkappa_i}{\varrho_i + r} \sin(\varrho_i - r) \frac{l}{2} \\
S_i &= \frac{1 + \varkappa_i}{\varrho_i + r} \sin(\varrho_i + r) \frac{l}{2}.
\end{aligned}
$$

Wir suchen nun eine der Formel (40) entsprechende Näherungslösung. Analog zu § 3, c folgt wieder der Ansatz

$$
\begin{aligned}
E_i &= E_i' + \varepsilon e_i \\
F_i &= F_i' + \varepsilon f_i \\
(43)\qquad D_i &= D_i' + \varepsilon d_i \\
S_i &= S_i' + \varepsilon s_i.
\end{aligned}
$$

Für $\varepsilon = 0$, d. h. $\alpha = \beta$ ergibt sich aus (42) und (31)

$$
\begin{aligned}
E_1' &= -F_1' = \alpha(\sigma_2 - r) \\
E_2' &= -F_2' = \alpha(\sigma_1 - r) \\
(44)\qquad D_i' &= \frac{2}{\sigma_i - r} \sin(\sigma_i - r) \frac{l}{2} \\
S_i' &= 0.
\end{aligned}
$$

Die beiden Klammerausdrücke $(E_1 F_2 - E_2 F_1)$ und $(S_1 D_2 - D_1 S_2)$ sind somit von der Größenordnung ε, ihr Prodnkt darf vernachläßigt werden, ebenso S_i^2. Die Gleichung (41) läßt sich dann schreiben

$$(45) \quad E_1 F_1 D_2^2 + E_2 F_2 D_1^2 = (E_1 F_2 + E_2 F_1) D_1 D_2 \cos(\varrho_1 - \varrho_2) \frac{l}{2}.$$

Entwickelt man nun (42) nach Potenzen von ε, so erhält man unter Benützung von (31), (32) und (43)

$$(46) \quad \begin{aligned} e_i &= \alpha (M_i \sigma_i - \mu_i) \\ f_i &= -\alpha (\sigma_i - r) + \alpha \mu_i + (\alpha - \gamma) M_i r \\ d_i &= \frac{\mu_i l}{\sigma_i - r} \cos(\sigma_i - r) \frac{l}{2} - \frac{M_i + \dfrac{2\mu_i}{\sigma_i - r}}{\sigma_i - r} \sin(\sigma_i - r) \frac{l}{2}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Größen und mit Rücksicht auf (31) und ff. nimmt (45) nach einiger Zwischenrechnung die Form an

$$\begin{aligned} (46a) \quad & E_1'^2 D_2'^2 + E_2'^2 D_1'^2 - 2 E_1' E_2' D_1' D_2' \cos(\sigma_1 - \sigma_2) \frac{l}{2} = \\ & \varepsilon \Big[(f_1 - e_1) E_1' D_2'^2 + (f_2 - e_2) E_2' D_1'^2 - 2 (d_1 D_1' E_2'^2 + d_2 D_2' E_1'^2) \\ & - (\mu_1 - \mu_2) l D_1' D_2' E_1' E_2' \sin(\sigma_1 - \sigma_2) \frac{l}{2} + \Big\{ 2 E_1' E_2' (d_1 D_2' \\ & + d_2 D_1') - \Big(E_1' (f_2 - e_2) + E_2' (f_1 - e_1) \Big) D_1' D_2' \Big\} \cos(\sigma_1 - \sigma_2) \frac{l}{2} \Big]. \end{aligned}$$

Aus (44) folgen unter Zuhilfenahme der Abkürzung $\varphi_i = (\sigma_i - r) \frac{l}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} E_1' D_2' &= 2 \sin \varphi_2 \\ \frac{1}{\alpha} E_2' D_1' &= 2 \sin \varphi_1 \end{aligned}$$

und wir erhalten unter Einführung der Größe

$$\Phi_i = \frac{f_i - e_i}{E_i'}$$

für die Gleichung (46a)

$$\begin{aligned} (46b) \quad & 4\alpha^2 (\sin^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_2 - 2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ = \; & 4\alpha^2 \varepsilon \Big[\Phi_1 \sin^2 \varphi_2 + \Phi_2 \sin^2 \varphi_1 - (\Phi_1 + \Phi_2) \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ & - (\mu_1 - \mu_2) l \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ & - \frac{1}{2\alpha} \Big\{ d_1 E_2' \big(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \big) \\ & + d_2 E_1' \big(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \big) \Big\} \Big]. \end{aligned}$$

Auf der linken Seite erscheint (für $\varepsilon = 0$) die Frequenz-Bedingung der kreiszylindrischen Welle: $4\alpha^2 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$; die eckige Klammer auf der rechten Seite läßt sich umformen in

$$(46\,c)\quad 4\alpha^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\Big[- \Phi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 + \Phi_2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - (\mu_1 - \mu_2)\, l \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \frac{1}{\alpha}\left\{ d_2 E_1' \cos\varphi_1 - d_1 E_2' \cos\varphi_2 \right\}\Big].$$

Spaltet man noch die Wurzel $\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ ab, und setzt man die in (46) angegebenen Werte in die geschweifte Klammer ein, so folgt für (46b) die Gleichung

$$(46\,d)\quad \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \varepsilon\Big[- \Phi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 + \Phi_2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - (\mu_1 - \mu_2)\, l \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \Big\{ - (\mu_1 - \mu_2)\, l \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \Big(M_2 + \frac{2\mu_2}{\sigma_2 - r}\Big) \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 + \Big(M_1 + \frac{2\mu_1}{\sigma_1 - r}\Big) \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \Big\}\Big].$$

In der eckigen Klammer auf der rechten Seite dürfen auch die Glieder erster Ordnung vernachläßigt werden, es darf hier somit

$$\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 = \sin\varphi_2 \cos\varphi_1$$

gesetzt werden nnd wir können schreiben

$$(47\,a)\quad \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \varepsilon\Big[\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \Big(M_1 - M_2 + \frac{2\mu_1}{\sigma_1 - r} - \frac{2\mu_2}{\sigma_2 - r} - \Phi_1 + \Phi_2\Big) - (\mu_1 - \mu_2)\, l \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\Big].$$

Für die Größen Φ_1 und Φ_2 findet man aus (46)

$$\Phi_1 = \frac{f_1 - e_1}{E_1'} = - \frac{\sigma_1 - r - 2\mu_1}{\sigma_2 - r} + M_1$$

$$\Phi_2 = \frac{f_2 - e_2}{E_2'} = - \frac{\sigma_2 - r - 2\mu_2}{\sigma_1 - r} + M_2,$$

wenn man beachtet, daß zufolge (21)

$$- \alpha(\sigma_1 - r) - \gamma r = \alpha(\sigma_2 - r)$$

ist. Aus (33) und (34) erhält man die Beziehung

$$2\mu_1 - (\sigma_1 - r) = - 2\mu_2 + \sigma_2 - r$$

und wir finden für die Differenz $\Phi_1 - \Phi_2$ den Wert

$$\Phi_1 - \Phi_2 = M_1 - M_2 + \frac{2\mu_1}{\sigma_1 - r} - \frac{2\mu_2}{\sigma_2 - r}.$$

Die Gleichung (46 d) vereinfacht sich nunmehr zu

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon(\mu_1 - \mu_2)\,l = 0.$$

Diese stimmt mit der in § 3c gefundenen Bedingung vollkommen überein, wir können deshalb sofort das Ergebnis anschreiben

$$M^2 + 4(1-\varepsilon)\alpha P = \left(\frac{2\pi\alpha(1-\varepsilon)}{l}\right)^2.$$

Diese Gleichung stellt in einem rechtwinkligen PM-Koordinatensystem eine zur P-Achse symmetrische Parabel dar mit den Achsenabschnitten

$$M_0 = \frac{2\pi\beta}{l} \text{ (Knickmoment)}$$

$$P_0 = \frac{\pi^2\beta}{l^2} \text{ (Eulersche Knicklast).}$$

Mit Hilfe dieser Größen nimmt die Parabelgleichung die Form an

$$\frac{M^2}{M_0^2} + \frac{P}{P_0} = 1.$$

Es bestätigt sich somit die Grammel'sche Näherungsformel.[11]

§ 5. Welle mit parallel verschiebbaren Enden.

Die Welle sei nun an ihren Enden so gelagert, daß sie sich dort nur parallel zu ihrer ursprünglichen Achse nach der Seite bewegen kann. In den Punkten $t = 0$ und $t = l$ soll also die Wellentangente parallel der Richtung der Kraft P sein (Fig. 4), während die Komponente Q verschwindet, d. h. es ist

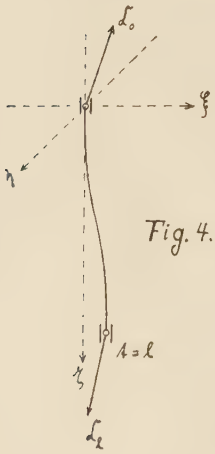


Fig. 4.

$$(48) \qquad \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \text{ für } t = 0$$

$$(49) \qquad \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \text{ für } t = l.$$

Durch Einsetzen der Integrale (11) in diese Randbedingungen erhält man die Gleichungen

(50)
$$\Sigma a_i \cos \tau_i = 0$$
$$\Sigma \varkappa_i a_i \sin \tau_i = 0$$
$$\Sigma (a_i \cos \varrho_i l \cos \tau_i + a_i \sin \varrho_i l \sin \tau_i) = 0$$
$$\Sigma (\varkappa_i a_i \sin \varrho_i l \cos \tau_i - \varkappa_i a_i \cos \varrho_i l \sin \tau_i) = 0,$$

woraus nach früherem für das Ausknicken der Welle die Bedingung folgt

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varkappa_1 & \varkappa_2 \\ \cos \varrho_1 l & \cos \varrho_2 l & \sin \varrho_1 l & \sin \varrho_2 l \\ \varkappa_1 \sin \varrho_1 l & \varkappa_2 \sin \varrho_2 l & -\varkappa_1 \cos \varrho_1 l & -\varkappa_2 \cos \varrho_2 l \end{vmatrix} = 0,$$

oder, explizit geschrieben,

$$2 \varkappa_1 \varkappa_2 (1 - \cos \varrho_1 l \cos \varrho_2 l) - (\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2) \sin \varrho_1 l \sin \varrho_2 l = 0.$$

Zerlegt man wieder in Linearfaktoren (vergl. Gleich. 19), so findet man das Gleichungspaar

(51)
$$\varkappa_1 \operatorname{tg} \frac{\varrho_1 l}{2} = \varkappa_2 \operatorname{tg} \frac{\varrho_2 l}{2}$$
$$\varkappa_1 \operatorname{tg} \frac{\varrho_2 l}{2} = \varkappa_2 \operatorname{tg} \frac{\varrho_1 l}{2},$$

dessen kleinste von Null verschiedene Wurzel die kritische Frequenz angibt. Wir besprechen wieder einige Sonderfälle.

a) Welle mit gleichen Biegungssteifigkeiten.

Ist $\alpha = \beta$, so wird $\varkappa_1 = \varkappa_2 = -1$ und aus (51) folgt sofort

(52)
$$\operatorname{tg} \frac{\varrho_1 l}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varrho_2 l}{2},$$

also dieselbe Bedingung wie in § 3a mit der Lösung

(52a)
$$M^2 + 4 \alpha P = \left(\frac{2 \pi \alpha}{l} \right)^2.$$

Diese Formel wurde schon von Greenhill[12] aufgestellt. Wir wollen noch die Gestalt der ausgeknickten Wellenachse ermitteln. Zunächst folgt aus (50) wegen (52) die Verhältniskette

$$a_1 \cos \tau_1 : a_2 \cos \tau_2 : a_1 \sin \tau_1 : a_2 \sin \tau_2 = \cos \varphi : -\cos \varphi : \sin \varphi : -\sin \varphi,$$

wobei φ dieselbe Bedeutung hat wie in (26). Setzt man in (24) ein, so erhält man, da ja $Q = 0$ ist, nach kurzer Umformung für die Projektion der elastischen Linie auf die ξ, η-Ebene

(53)
$$\xi = a\left[\frac{\sin\left((\varrho_1 - r)t - \varphi\right)}{\varrho_1 - r} - \frac{\sin\left((\varrho_2 - r)t - \varphi\right)}{\varrho_2 - r} + \left(\frac{1}{\varrho_1 - r} - \frac{1}{\varrho_2 - r}\right)\sin\varphi\right]$$

$$\eta = a\left[\frac{\cos\left((\varrho_1 - r)t - \varphi\right)}{\varrho_1 - r} - \frac{\cos\left((\varrho_2 - r)t - \varphi\right)}{\varrho_2 - r} - \left(\frac{1}{\varrho_1 - r} - \frac{1}{\varrho_2 - r}\right)\cos\varphi\right]$$

wobei wieder a die unbestimmte Konstante der Ausknickung ist. Ist insbesondere $P = 0$, so lauten diese Gleichungen, wenn man der Einfachheit halber $\varphi = 0$ annimmt und $\frac{al}{2\pi} = b$ setzt und nach Potenzen von $(\varrho_1 - r)$ entwickelt

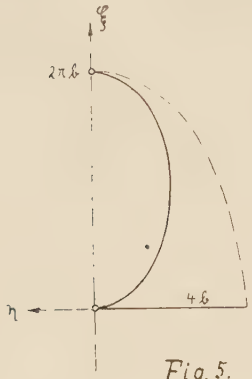


Fig. 5.

(54)
$$\xi = b\left(\frac{2\pi t}{l} - \sin\frac{2\pi t}{l}\right)$$
$$\eta = -2b\sin^2\frac{\pi t}{l}.$$

Für $M = 0$ folgt aus (53) wegen (21)

$$\xi = 0$$
$$\eta = -4b\sin^2\frac{\pi t}{2l}.$$

Diese Gleichungen stellen eine auf der η-Achse liegende Strecke von der Länge $4b$ dar. Mit wachsendem M geht diese Strecke gemäß (53) allmählich in die durch (54) bestimmte gespitzte Zykloide mit dem Durchmesser $2b\pi$ und der Pfeilhöhe $2b$ über (Fig. 5).

b) Welle mit beliebigem Querschnitt ohne Achsialkraft.

Im Grenzfall $P = 0$ erhält man zufolge (28) und (29) mit Hilfe der Bezeichnungen

$$m = \sqrt{\frac{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)}{\alpha\beta}}$$

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma}}$$

aus (51) für das kritische Drillungsmoment $M_0 = \gamma r$ die Bestimmungsgleichungen

$$\text{tg}\,\frac{m\,r\,l}{2} = \text{vtg}\,\frac{r\,l}{2}$$

(55)

$$\text{tg}\,\frac{r\,l}{2} = \text{vtg}\,\frac{m\,r\,l}{2}.$$

Die kleinste von Null verschiedene Wurzel dieser Gleichungen ergibt das Knickmoment M_0, das wir im folgenden für die verschiedenen Querschnitte diskutieren.

Wir unterscheiden nach Grammel[13] folgende Querschnittsgruppen

1. Nichtschlanke Querschnitte $(\alpha \geqq \beta > \gamma)$
2. Mittelschlanke Querschnitte $(\beta = \gamma)$
3. Schlanke Querschnitte $(\alpha > \gamma > \beta)$;

für alle Querschnitte gilt $\alpha + \beta > \gamma$

und $2\beta > \gamma$.

Nichtschlanke Querschnitte. $(\alpha > \beta > \gamma)$

Ersetzt man die Konstante v durch $w = \frac{2\beta - \gamma}{2\alpha - \gamma}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma}}$, so gehen die Gleichungen (55) in die von Grammel[13] aufgestellten Gleichungen (s. a. § 3b) über, die in Fig. 9 graphisch dargestellt sind, soweit sie zur Auffindung der kleinsten positiven Wurzel $\frac{r\,l}{2}$ benötigt werden. Das Kurvenblatt läßt sich auch im vorliegenden Falle verwenden, da ja lediglich die Ordinate w einen anderen Wert besitzt. Weil die Gleichungen (55) durch Reziproknehmen von v wechselseitig ineinander übergehen, so genügen die Kurvenzweige zwischen den Ordinaten 0 und 1 zur Bestimmung des Knickmomentes. Da nun wegen $\alpha \geqq \beta > \gamma$ immer $v > 1$ ist, so ist immer die Ordinate $w = \frac{1}{v}$ zu benützen. Zur Ermittlung des Knickmomentes sucht man somit die zu dem Parameter m gehörende Kurve auf und schneidet sie mit der Geraden $w = \frac{1}{v}$, die Abszisse $\frac{r\,l}{2}$ des Schnittpunktes liefert dann das gesuchte Drillungsmoment $M_0 = \gamma r$. Es

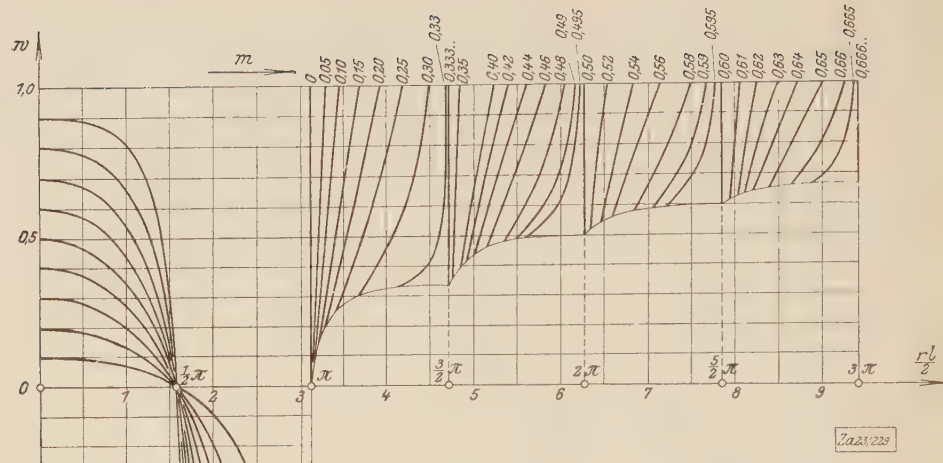


Fig. 9.

ist nun zu untersuchen, in welchem Bereiche diese Wurzeln für die verschiedenen (nichtschlanken) Querschnitte liegen. Für alle Querschnitte darf vorausgesetzt werden

$$\alpha \geqq \beta$$

$$\alpha > \gamma$$

und für nichtschlanke Querschnitte $\beta > \gamma$;

somit wird für solche $\nu > 1$

und $0 \leqq m < 1$,

und weiterhin

$$\frac{\nu}{m} = \frac{\beta}{\beta - \gamma} > 1$$

$$\nu m = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha} < 1.$$

Da nun wegen $\nu > 0$ die Gleichungen (55) bedingen, daß immer

$$-\frac{\operatorname{tg}\frac{m r l}{2}}{\operatorname{tg}\frac{r l}{2}} > 0$$

bleibt, so ist in dem Intervalle $0 < \frac{r l}{2} < \pi$ mit Rücksicht auf $0 \leqq m < 1$

$$\operatorname{tg}\frac{m r l}{2} < m \operatorname{tg}\frac{r l}{2}$$

zu betrachten. Die Existenz einer Wurzel in diesem Intervalle ist dann an die Bedingungen geknüpft (Gleichung 55)

$$\frac{v}{m} < 1$$

$$\text{oder aber } vm > 1,$$

die von nichtschlanken Querschnitten nicht erfüllt werden können (siehe oben), d. h. das Knickmoment M_0 ist größer als $\frac{2\pi\gamma}{l}$.

Mittelschlanke Querschnitte. ($\beta = \gamma$)

Da für $\beta = \gamma$ der Parameter m verschwindet, darf $\operatorname{tg}\frac{m r l}{2} = \frac{m r l}{2}$ gesetzt werden und wir erhalten aus (55) wegen $v = \infty$

$$\operatorname{tg}\frac{r l}{2} = 0$$

$$\operatorname{tg}\frac{r l}{2} = vm\frac{r l}{2} = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha}\frac{r l}{2}$$

mit der kleinsten von Null verschiedenen Wurzel

$$\frac{r l}{2} = \pi$$

und hieraus das Knickmoment $M_0 = \frac{2\pi\beta}{l}$.

Schlanke Querschnitte. ($\alpha > \gamma \geqq \beta$)

Diesem Fall entspricht in der Kreiseldynamik die Rotation eines unsymmetrischen kräftefreien Kreisels um seine mittlere Hauptachse, der bekanntlich keine stabile Bewegung zuläßt.[14] Unsere bisherige Voraussetzung, daß die Deformationen der Welle, das sind beim Kreisel die Auslenkungen der Figurenachse in dem Intervalle $0 < t < l$, immer sehr klein sind, ist nicht mehr sicher erfüllt. Dies drückt sich darin aus, daß die Frequenz ϱ_2 imaginär wird. Um eine weitere Verwendung unserer Näherungsintegrale (11) zu er-

möglichen, beschränken wir uns auf solche Fälle, wo $\operatorname{tg} \frac{m r l}{2} = \frac{m r l}{2}$ gesetzt werden darf. Die Gleichungen (55) lauten dann

$$\operatorname{tg} \frac{r l}{2} = \frac{m}{\nu} \frac{r l}{2} = -\frac{\gamma - \beta}{\beta} \frac{r l}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{r l}{2} = m \nu \frac{r l}{2} = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha} \frac{r l}{2}.$$

Die erste dieser Gleichungen liefert das Knickmoment M_0 in dem Bereich $\frac{\pi}{2} < \frac{r l}{2} < \pi$, da ja immer $\gamma - \beta < \beta$ ist. Die Lösung ist jedoch, wie schon oben erwähnt, nur dann brauchbar, wenn

$$\left| \frac{m r l}{2} \right| \ll 1$$

bleibt, was nachträglich immer zu untersuchen ist.

---

§ 6. Welle mit fest eingespannten Enden.

Ist die Welle an ihren Enden $t = 0$ und $t = l$ fest eingespannt (Fig. 6), so lauten die Randbedingungen, denen die Integrale genügen müssen

(56) $$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \text{ für } t = 0$$

(57) $$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \text{ für } t = l$$

(58) $$\left.\begin{matrix} \xi = 0 \\ \eta = 0 \end{matrix}\right\} \text{ für } t = l.$$

Aus (11), (13) und (56) folgt für die Größen Q und χ_0

(59) $$\frac{Q}{P} \cos \chi_0 = \Sigma a_i \cos \tau_i$$

$$\frac{Q}{P} \sin \chi_0 = \Sigma - a_i \varkappa_i \sin \tau_i.$$

Setzt man dies wieder in (11) ein, so nehmen unter Einführung der Größen

$$
\begin{aligned}
V_i &= \cos \varrho_i l - \cos r l \\
W_i &= \sin \varrho_i l + \varkappa_i \sin r l \\
X_i &= \varkappa_i \sin \varrho_i l + \sin r l \\
Y_i &= -\varkappa_i (\cos \varrho_i l - \cos r l)
\end{aligned} \tag{60}
$$

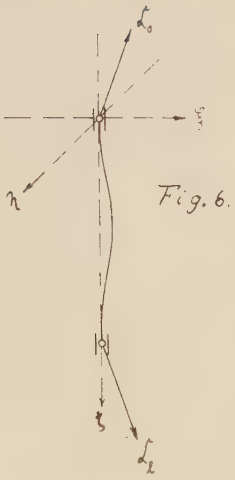


Fig. 6.

die Bedingungen (57) die Gestalt an

$$
\begin{aligned}
\Sigma(V_i a_i \cos \tau_i + W_i a_i \sin \tau_i) &= 0 \\
\Sigma(X_i a_i \cos \tau_i + Y_i a_i \sin \tau_i) &= 0.
\end{aligned} \tag{61}
$$

Zur Berechnung der Koordinaten ξ, η, ζ der Wellenachse erhält man aus (11) und (13)

$$
\begin{aligned}
x \cos rt - y \sin rt &= \Sigma(a_i \cos [(\varrho_i - r) t - \tau_i] \\
&- (1 + \varkappa_i) a_i \sin (\varrho_i t - \tau_i) \sin rt) - \frac{Q}{P} \cos \chi_0
\end{aligned}
$$

$$
x \sin rt + y \cos rt - \Sigma(-a_i \sin [(\varrho_i - r) t - \tau_i] + (1 + \varkappa_i) a_i \sin (\varrho_i t - \tau_i) \cos rt) - \frac{Q}{P} \sin \chi_0
$$

und hieraus durch Integration gemäß (12) und (59) mit Hilfe der Abkürzungen

$$
\begin{aligned}
R_i &= -t + \frac{(1 - \varkappa_i) \sin (\varrho_i - r) t}{2 (\varrho_i - r)} + \frac{(1 + \varkappa_i) \sin (\varrho_i + r) t}{2 (\varrho_i + r)} \\
S_i &= -\frac{(1 - \varkappa_i) (\cos (\varrho_i - r) t - 1)}{2 (\varrho_i - r)} - \frac{(1 + \varkappa_i) (\cos (\varrho_i + r) t - 1)}{2 (\varrho_i + r)} \\
T_i &= +\frac{(1 - \varkappa_i) (\cos (\varrho_i - r) t - 1)}{2 (\varrho_i - r)} - \frac{(1 + \varkappa_i) (\cos (\varrho_i + r) t - 1)}{2 (\varrho_i + r)} \\
U_i &= \varkappa_i t + \frac{(1 - \varkappa_i) \sin (\varrho_i - r) t}{2 (\varrho_i - r)} - \frac{(1 + \varkappa_i) \sin (\varrho_i + r) t}{2 (\varrho_i + r)}
\end{aligned} \tag{62}
$$

die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\xi &= -\Sigma(R_i a_i \cos \tau_i + S_i a_i \sin \tau_i) \\
\eta &= -\Sigma(T_i a_i \cos \tau_i + U_i a_i \sin \tau_i) \\
\zeta &= t.
\end{aligned} \tag{63}
$$

Die Randbedingungen (58) lauten dann, wenn die Konstanten R'_i usw. aus den Funktionen R_i usw. dadurch hervorgehen, daß man $t = l$ setzt,

$$(64)\qquad \begin{aligned} \Sigma(R'_i\, a_i \cos\tau_i + S'_i\, a_i \sin\tau_i) &= 0 \\ \Sigma(T'_i\, a_i \cos\tau_i + U'_i\, a_i \sin\tau_i) &= 0. \end{aligned}$$

Das lineare homogene System (61) und (64) liefert nun die Knickbedingung

$$65)\qquad \begin{vmatrix} V_1 & V_2 & W_1 & W_2 \\ X_1 & X_2 & Y_1 & Y_2 \\ R'_1 & R'_2 & S'_1 & S'_2 \\ T'_1 & T'_2 & U'_1 & U'_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante gibt im allgemeinsten Fall eine sehr umständliche Gleichung; wir beschränken uns deshalb von vornherein auf die Diskussion der Welle mit gleichen Biegungssteifigkeiten.

Für $\alpha = \beta$ ist $\varkappa_1 = \varkappa_2 = -1$ und die Konstanten V_i usw. nehmen die Werte an

$$(66)\qquad \begin{aligned} V_i = \quad Y_i &= (\cos\varrho_i l - \cos r l) = -2\sin\varphi_i \sin\psi_i \\ W_i = -X_i &= (\sin\varrho_i l - \sin r l) = +2\sin\varphi_i \cos\psi_i \\ R'_i = \quad U'_i &= \frac{\sin(\varrho_i - r) l - (\varrho_i - r) l}{\varrho_i - r} = l\,\frac{\sin\varphi_i \cos\varphi_i - \varphi_i}{\varphi_i} \\ T'_i = -S'_i &= \frac{\cos(\varrho_i - r) l - 1}{\varrho_i - r} = -l\,\frac{\sin^2\varphi_i}{\varphi_i}, \end{aligned}$$

wenn man wieder

$$(\varrho_i - r)\frac{l}{2} = \varphi_i$$

$$(\varrho_i + r)\frac{l}{2} = \psi_i$$

setzt. Aus der Determinante (65) folgt unter Beachtung von (66) die Gleichung

$$\frac{\sin^2\varphi_1}{\varphi_2^2}\Big[(\sin\varphi_2\cos\varphi_2 - \varphi_2)^2 + \sin^4\varphi_2\Big]$$

$$+\frac{\sin^2\varphi_2}{\varphi_1^2}\Big[(\sin\varphi_1\cos\varphi_1 - \varphi_1)^2 + \sin^4\varphi_1\Big] - \frac{2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\varphi_1\varphi_2}$$

$$\Big[(\sin\varphi_1\cos\varphi_1 - \varphi_1)(\sin\varphi_2\cos\varphi_2 - \varphi_2) + \sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2\Big]$$

$$-\frac{2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\varphi_1\varphi_2}$$

$$\Big[\sin^2\varphi_1(\sin\varphi_2\cos\varphi_2 - \varphi_2) - \sin^2\varphi_2(\sin\varphi_1\cos\varphi_1 - \varphi_1)\Big] = 0,$$

wenn man berücksichtigt, daß $\varphi_1 - \varphi_2 = \psi_1 - \psi_2$ ist. Multipliziert man aus, so findet man nach Ordnen der Glieder die Gleichung

$$-\sin^2(\varphi_1-\varphi_2)-\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2\left(\frac{1}{\varphi_1}-\frac{1}{\varphi_2}\right)^2-\frac{2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{\varphi_1}$$

$$+2\,\frac{\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{\varphi_2}=0,$$

die sich als reines Quadrat schreiben läßt

$$(67)\quad \left[(\varphi_1-\varphi_2)\sin\varphi_1\sin_2\varphi_2-\varphi_1\varphi_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]^2=0.$$

Für die weiteren Untersuchungen bringen wir diese Gleichung zweckmäßigerweise auf die Form

$$(68)\qquad \left[\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_1(\operatorname{tg}\varphi_2-\varphi_2)-\varphi_2(\operatorname{tg}\varphi_1-\varphi_1)\right]^2=0.$$

Im Grenzfalle $r = 0$ ist $\varphi_1 = -\varphi_2$ und wir erhalten die Bedingung

$$\left[2\,\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_1(\operatorname{tg}\varphi_1-\varphi_1)\right]^2=0.$$

Aus $\operatorname{tg}\varphi_1 = 0$ folgt die allein wichtige Wurzel

$$\varphi_1=\frac{\varrho_1 l}{2}=\pi,$$

die zufolge (21) die bekannte Eulersche Knicklast

$$(69)\qquad P_0=\frac{4\pi^2\alpha}{l^2}$$

ergibt.

Um das entsprechende Knickmoment zu berechnen, entwickelt man (68) nach Potenzen von der gegen 0 gehenden Größe φ_1 und erhält mit $\varphi_1 = 0$ die Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi_2=\varphi_2$$

mit der Wurzel $\varphi_2 = 4{,}4934.$

Man findet dann für das Knickmoment aus (21)

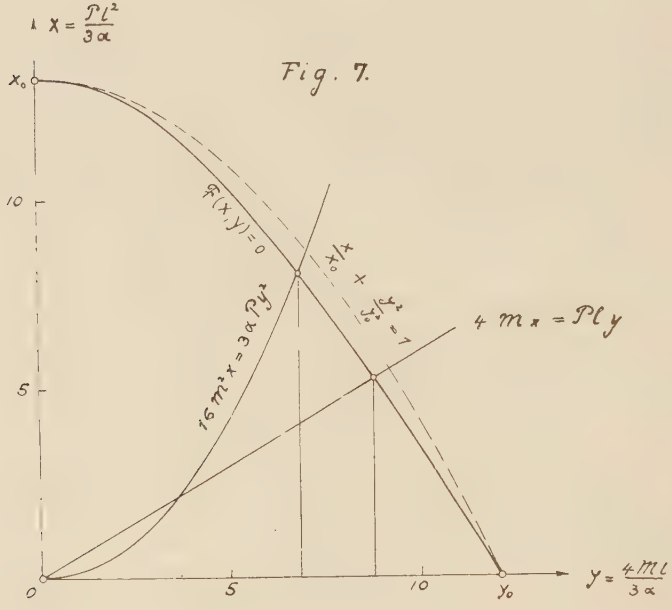
$$(70)\qquad M_0=8{,}9868\,\frac{\alpha}{l}.$$

Wir drücken nun die Bedingung (67) in Funktionen von M und P aus und erhalten mit Rücksicht auf (21)

$$F(M,P) = \frac{P}{\alpha}\sin l\sqrt{\frac{P}{\alpha}+\frac{M^2}{4\alpha^2}}$$

$$-\frac{2}{l}\sqrt{\frac{P}{\alpha}+\frac{M^2}{4\alpha^2}}\left(\cos\frac{Ml}{2\alpha}-\cos l\sqrt{\frac{P}{\alpha}+\frac{M^2}{4\alpha^2}}\right)=0.$$

Diese Gleichung, die den Zusammenhang zwischen den kritischen



Belastungen M und P und den Wellenkonstanten α und l vermittelt, ist in Fig. 7 mit $y = \frac{4Ml}{3\alpha}$ als Abszisse und $x = \frac{Pl^2}{3\alpha}$ als Ordinate abgebildet. Ist M beziehungsweise P gesucht, so ist der gewünschte Wert sofort aus der Abszisse bezw. Ordinate des zugehörigen Kurvenpunktes zu entnehmen.

Zur Berechnung von α schneidet man die Kurve $F(x,y) = 0$ mit der geraden $4Mx = Ply$ und berechnet dann aus der Abszisse oder Ordinate des Schnittpunktes die zu den Belastungen M, P gehörende Biegungssteifigkeit α. Schneidet man $F(x,y) = 0$ mit der Parabel $16M^2x = 3\alpha Py^2$, so liefern die Koordinaten des

Schnittpunktes die Knicklänge l einer vorgelegten Welle. In jedem Falle müssen natürlich 3 von den 4 Werten M, P, α, l bekannt sein.

Für manche Zweckr ist es vorteilhaft, die etwas umständliche Gleichung (71) durch eine einfache Näherungsfunktion zu ersetzen. Wie aus Fig. 7 ersichtlich ist, genügt dieser Forderung die Parabel

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y^2}{y_0^2} = 1$$

wenigstens in solchen Fällen, wo keine große Genauigkeit erforderlich ist. Die Achsenabschnitte x_0 und y_0 besitzen die Werte

$$x_0 = \frac{P_0 l^2}{3\alpha}$$

$$y_0 = \frac{4 M_0 l}{3\alpha},$$

wobei P_0 die Eulersche Knicklast und M_0 das in (70) gefundene Knickmoment ist.

Greenhill[12] hat für diesen Einspannungsfall an Stelle von (71) die Formel

$$M^2 + 4\alpha P = \left(\frac{4\pi\alpha}{l}\right)^2$$

aufgestellt, indem er die Querkraft Q vernachläßigt und außerdem annimmt, daß die Wellenmitte $t = \frac{l}{2}$ parallel zu den Wellenenden bleibt, sodaß sich die Wellenachse in 2 Kurvenzweige zerlegen läßt, die beide die Randbedingungen der Welle mit parallel verschiebbaren Enden (s. § 5a) erfüllen. Diese Voraussetzungen treffen jedoch nur im Eulerschen Falle zu; wie unten gezeigt, ist die Querkraft Q im allgemeinen von Null verschieden; auch die zweite Annahme ist unbegründet und falsch, wie man aus der Gleichung der elastischen Linie (s. Gleichung 74 auf folgender Seite) leicht nachweisen kann. Nur wenn man diese Voraussetzungen als weitere Randbedingungen einführt, besitzt die Greenhillsche Formel Gültigkeit; sie ist identisch mit der Knickformel (52a), wenn man dort die Wellenlänge l durch $\frac{l}{2}$ ersetzt.

Um die Kraft Q zu bestimmen, berechnet man zunächst aus den Gleichungen (61) und (64) unter Benützung von (67) die Verhältniskette

$$(72) \qquad a_1 \cos\tau_1 : a_2 \cos\tau_2 : a_1 \sin\tau_1 : a_2 \sin\tau_2$$
$$= -\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 : \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 : \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 : -\sin\varphi_1 \cos\varphi_2.$$

Durch Einsetzen in (59) erhält man dann für die Kraft Q

$$(73) \qquad \begin{aligned} \frac{Q}{P}\cos\chi_0 &= 0 \\ \frac{Q}{P}\sin\chi_0 &= -a\sin(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned}$$

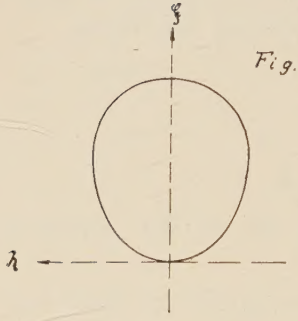


Fig. 8.

Wird die Welle nur auf Druck beansprucht (M = o), so verschwindet, wie zu erwarten war, die Komponente Q, da dann

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = \pi,$$

somit

$$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

Zur Berechnung der elastischen Linie setzt man (66) und (72) in (63) ein und findet für ihre Projektion auf die Normalebene der gestreckten Wellenachse

$$(74) \qquad \begin{aligned} \xi = a\Bigg[& \left(\frac{\sin\varphi_1 \frac{t}{l}\cos\varphi_1 \frac{t}{l}}{\varphi_1} - \frac{\sin\varphi_2 \frac{t}{l}\cos\varphi_2 \frac{t}{l}}{\varphi_2}\right)\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \\ & - \frac{\sin^2\varphi_1 \frac{t}{l}\sin\varphi_2\cos\varphi_1}{\varphi_1} + \frac{\sin^2\varphi_2 \frac{t}{l}\sin\varphi_1\cos\varphi_2}{\varphi_2}\Bigg] \\ \eta = a\Bigg[& \left(\frac{\sin^2\varphi_1 \frac{t}{l}}{\varphi_1} - \frac{\sin^2\varphi_2 \frac{t}{l}}{\varphi_2}\right)\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \\ & + \frac{\left(\sin\varphi_1 \frac{t}{l}\cos\varphi_1 \frac{t}{l} - \varphi_1 \frac{t}{l}\right)\sin\varphi_2\cos\varphi_1}{\varphi_1} \\ & - \frac{\left(\sin\varphi_2 \frac{t}{l}\cos\varphi_2 \frac{t}{l} - \varphi_2 \frac{t}{l}\right)\sin\varphi_1\cos\varphi_2}{\varphi_2}\Bigg]. \end{aligned}$$

Ist P = 0, so folgt durch Entwickeln nach Potenzen von φ_1 das Gleichungspaar

$$\xi = a\left[-\frac{\sin\varphi_2 \frac{t}{l} \sin\varphi_2 \frac{l-t}{l}}{\varphi_2} + \frac{t(l-t)}{l^2}\sin\varphi_2\right]$$

$$\eta = a\left[\frac{\sin\varphi_2 \frac{t}{l} \cos\varphi_2 \frac{l-t}{l}}{\varphi_2} - \frac{t}{l}\cos\varphi_2\right],$$

wobei $\varphi_2 \approx 1{,}4\,\pi$ ist. Der Verlauf dieser Kurve ist aus Fig. 8 ersichtlich. Die Gleichungen (74) bedeuten somit im allgemeinsten Falle ein Spitzenoval, dessen Spitzenwinkel zwischen 0 (Eulersche Knicklast) und $2\,\pi$ liegt.

Nahezu kreiszylindrische Welle mit Achsialkraft.

Das Ergebnis der §§ 3c und 4 legt es nahe, eine Näherungsformel

$$\frac{M^2}{M_0^2} + \frac{P}{P_0} = 1$$

anzusetzen, wobei $M_0 = 9\,\frac{\beta}{l}$ und $P_0 = \frac{4\,\pi^2\,\beta}{l^2}$ ist. Die Genauigkeit dieser Formel dürfte für alle praktischen Fälle genügen.

Literaturverzeichnis

[1] R. Grammel, Krit. Drillungsmom. v. Wellen, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 1923, Seite 262 ff.

[2] G. Kirchhoff, Journ. f. Math. 56 (1858) S. 285.

[3] A. G. Greenhill, Proceedings Institution of Mech. Engineers 1883 S. 182 ff.

[4] Näheres siehe R. Grammel, a. a. O. S. 263.

[5] R. Grammel, a. a. O. S. 264.

[6] A. G. Greenhill, a. a. O. S. 203.

[7] R. Grammel, a. a. O. S. 266.

[8] A. Föppl, Vorles. über techn. Mech., Band 5, S. 207.

[9] R. Grammel, a. a. O. S. 268.

[10] R. Grammel, a. a. O. S. 265.

[11] R. Grammel, a. a. O. S. 271.

[12] A. G. Greenhill, a. a. O. S. 205.

[13] R. Grammel, a. a. O. S. 268. (Das Kurvenblatt Fig. 9 ist mit Gen. des Verf. ds. Schrift entn.)

[14] R. Grammel, Der Kreisel, S. 155.